Intelligent Information Management, 2009, 15-18
doi:10.4236/iim.2009.11003 Published Online July 2009 (http://www.scirp.org/journal/iim)

Scientific Research

Total Domination Number of Generalized Petersen Graphs

Jianxiang CAO[1], Weiguo LIN[2], Minyong SHI[3]

[1] *School of Computer Science, Communication University of China, Beijing* 100024, *China*

[2] *School of Computer Science, Communication University of China, Beijing* 100024, *China*

[3] *School of Animation, Communication University of China, Beijing* 100024, *China*

Abstract: Generalized Petersen graphs are an important class of commonly used interconnection networks and have been studied . The total domination number of generalized Petersen graphs P(m,2) is obtained in this paper.

Keywords: generalized Petersen graphs, total domination set, total domination number, regular graph, domination set, domination number

廣義 Petersen 圖的全控制數

曹建香 [1]，林衛國 [2]，石民勇 [3]

[1] 中國傳媒大學計算機學院，北京 100024；[2] 中國傳媒大學計算機學院，北京 100024；
[3] 中國傳媒大學動畫學院，北京 100024

摘　要：廣義 Petersen 圖是一類重要的並被廣泛研究的互聯網絡拓撲結構，控制數是圖論中的一個重要參數，而全控制數是控制數的一個變形，本文確定了廣義 Petersen 圖的全控制數。

關鍵詞：廣義 Petersen 圖，全控制集，全控制數，正則圖，控制集，控制數

1. 引 言

互聯網路具有廣泛的含義，泛指元件集合與通信通道集合按照一定的點對點方式相互連接所形成的系統。網路中的元件和元件之間的連接方式成為該網路的拓撲結構，人們通常把網路中的元件抽象成一個點，把通信通道抽象成兩點之間的連線，該網路中的拓撲結構就被抽象成一個圖。例如，一個通信網路可以用圖做模型，網路中的站點作為圖中的點，站點之間的連接作為圖中的邊。出於通信的需要，人們在站點安置發射器，利用某個站點上的發射器，可以把資訊發送到所有與該站相鄰的站點。為了覆蓋整個網路必須適當選取一些站點來放置發射器，使得每個站點都能接收到來自這些發射器的信號。在這裏抽象成圖論問題就是站點的選取相當於尋找圖中的控制集，出於經濟的考慮，發射器越少越好，這就是要去找圖中的最小控制集，所需要發射器的數目就是圖中的控制數。

上面提到的概念僅僅是控制這個概念的最原始的形式，在現實問題中很多問題都與控制的概念有關係，根據實際問題的不同，對控制的概念做了不同的變形，這裏要介紹的一種是——全控制數。然而對任意的圖確定其全控制數是 NP-完全問題，所以一般只能確定某些特殊圖類的全控制數，如在[1]中研究了兩類特殊圖廣義 De Bruijn 和廣義 Kauta 的全控制數。這裏我們主要求解廣義 Petersen 圖的全控制數。廣義 Petersen 圖是 Petersen 圖的推廣, 是一類重要的互聯網

路, 因而受到廣泛的研究, 在[2]中研究了廣義 Petersen 圖的 Hamiltonian 圈，在[3]中研究了廣義 Petersen 圖的交叉數（crossing number），在[4]中給出了廣義 Petersen 圖 P(m,2)的直徑和寬直徑，在[5][6]中求出了廣義 Petersen 圖的控制數的一個上界。本文求出了廣義 Petersen 圖的全控制數。

2. 基本概念

所謂圖(graph)指的是一個二元組(V, E)，其中 V 是圖的頂點集(vertex-set)，它的元素稱為圖的頂點(vertex)，而 E 是圖的邊集(edge-set)，它的元素稱為圖的邊(edge)，一般用 V(G)和 E(G)來表示圖 G 的頂點集和邊集，以區別於其他的圖。一條邊 e 和兩個頂點相關聯(incident)，即 e=(u, v)，其中 u, v∈V, 此時稱 u, v 為 e 的端點(end-vertex)，並稱 u, v 是相鄰的(adjacent)。直觀地看，頂點就是空間中的點，而邊就是兩點之間的連接.若這樣的連接沒有方向，即對圖中每條邊都有(u, v)=(v, u)，那麼稱這樣的圖為無向圖 (undirected graph)，其中的邊稱為無向邊，並可用 u v 這種形式來表示。若 $W\subseteq V(G)$,則 W 在 G 中的導出子圖記為<W>, 設 $v\in V(G)$, 令 $N(v)=\{u\in V(G)|\ uv\in E(G)\}$ 和 $N[v]=\{v\}\cup N(v)$; 設 $A\subseteq V(G)$,令 $N[A]=\{v|v\in A$ 或 $\exists u\in A$ 使 $uv\in E(G)\}$; 其中與頂點 u 相鄰接的頂點數稱為 u 的度，若一個圖中各個頂點的度都是 k，則稱該圖為 k 正則圖。

定義 1 廣義 Petersen 圖，記為 P(m, a),其定義如下：P(m, a)的頂點集為 $U\cup W$,其中 $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$, $W=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$; P(m, a) 的邊集為 $(u_i, w_i)(1\le i\le m)$,$(u_i,u_{i+1})(i\ge1,u_i=u_j$, 如果 $i\equiv j(\mathrm{mod}\ m))$和$(w_i, w_{i+a})(i\ge1,w_i=w_j$, 如果 $i\equiv j(\mathrm{mod}\ m))$。稱 U 中的點為外圈點，W 中的點為內圈點。廣義 Petersen 圖是 Coxter 於 1951 年引入的，顯然 Petersen 圖即為 P(5, 2)。

定義 2 若(u,v)是圖 G 中的一條邊，則稱點 u 全控制點 v。如果 $T\subseteq V(G)$能夠全控制所有 G 的頂點，則稱 T 是 G 的全控制集。所含頂點最少的全控制集稱為最小全控制集，其中的頂點數稱為全控制數，記作 $\gamma_t(G)$。

不難看出，全控制集就是不含孤立點的控制集，並且對任意圖，全控制集也肯定是控制集。文中所討論的圖 G 都是無向簡單圖, 用$\lceil x\rceil$表示不小於 x 的最小整數, 文中其他未加說明的概念和術語均參見文獻[7]。

3. 主要結論

為了證明主要定理，先給出一個引理。

引理 1 若 G 是一個具有 n 個頂點的 k 正則圖，則 $\gamma_t(G)\ge\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil$。

證明：由全控制數的定義知道，每個頂點可以控制除自身之外的 k 個頂點, 若設 T 是 G 的最小全控制集，設 $u,v\in T$，且 uv 是一條邊，在最好的情況下，$N(u)\cap N(v)=\phi$，則此時 T 中每個點恰好控制了 k 個點，故 T 中頂點數不小於$\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil$。

定理 1 廣義 Petersen 圖 P(m,2)的全控制數為：

$$\gamma_t(P(m,2)) = \begin{cases} 2k & m=3k \\ 2(k+1) & m=3k+1 \\ 2(k+1) & m=3k+2 \end{cases}$$

其中 $k\ge2$。

證明：證明過程主要是找出 P(m,2)的一個最小全控制集。下麵根據廣義 Petersen 圖的結構分三種情況討論：

情形 1 當 m=3k 時，證 $\gamma_t(P(3k,2))=2k$, k=1,2,…

取 $T=\{u_1,w_1,u_4,w_4,\ldots,u_{3k-2},w_{3k-2}\}$,|T|=2k, 下面分兩種情形來證明 T 就是 P(3k,2)的一個最小全控制集。

子情形 1.1 當 k 為偶數時

此時 P(3k,2)的內圈點構成了兩個長度為 3k/2 的內圈，外圈點構成一個長度為 3k 的外圈，記外圈 $C=u_1u_2u_3\ldots u_{3k}u_1$。兩個內圈分別用 C_1，C_2 來表示：

$C_1=w_1w_3w_5\ldots w_{3k-1}w_1$;

$C_2=w_2w_4w_6\ldots w_{3k}w_2$.

因為$(u_i, w_i)(1\le i\le m)$是 P(3k,2)中的邊, 所以 T 中的頂點已被全控制。同時 T 中的外圈點 $u_{3i-2}(1\le i\le k)$全控制了外圈上的點 $u_{3k},u_2, u_{3i-3}, u_{3i-1}$，其中 $2\le i\le k$, 這些點及 T 中的外圈點恰好是全部外圈上的點，即外圈上的點全部被全控制。

對於 T 中內圈 C_1 上的點 $w_1,w_7,\ldots,w_{3k-5}$ 全控制了 C_1 上的 $w_{3k-1},w_3,w_5,\ldots,w_{3k-4}$。類似的對於 T 中內圈 C_2 上的點 $w_4,w_{10},\ldots,w_{3k-2}$ 全控制了 C_2 上的 $w_2,w_6,w_8,w_{10},\ldots,w_{3k}$。因此 T 是一個全控制集，故 $\gamma_t(P(3k,2))\le|T|=2k$。

又因為 P(3k,2)是一個 3 正則圖，由引理 1 知，$\gamma_t(P(3k,2))\ge(2\times3k)/3=2k$。綜上可得 $\gamma_t(P(3k,2))=2k$。

子情形 1.2 當 k 為奇數時

此時 P(3k,2)的外圈點跟子情形 1.1 一樣，用 C 來表示，內圈點構成了一個長度為 3k 的內圈，記為 $C_1 = w_1w_3w_5\ldots w_{3k}w_2w_4w_6\ldots w_{3k-1}w_1$. 類似子情形 1.1, 易知 T 中的外圈點 $u_{3i-2}(1\le i\le k)$全控制了外圈上的點 $u_{3k}, u_2, u_{3i-3}, u_{3i-1}$，其中 $2\le i\le k$, 這些點及 T 中的外圈點恰好是全部外圈上的點，即外圈上的點全部被全控制。

對於 T 中內圈 C_1 上的點 $w_1, w_4, \ldots, w_{3k-2}$ 全控制了 C_1 上的 $w_{3k}, w_3, w_5, \ldots, w_{3k}$.被全控制。因此無論內圈點還是外全點都可由 T 中的點全控制，即 T 是一個全控制集，故 γ_t (P(3k,2))≤|T|=2k。

又因為 P(3k,2)是一個 3 正則圖，由引理 1 知，γ_t (P(3k,2))≥(2×3k)/3=2k。綜上可得 γ_t (P(3k,2))=2k。

綜合子情形 1.1 和 1.2 可知，當 m=3k，k≥1 時，有 γ_t (P(3k,2))=2k。證畢!

情形 2 當 m=3k+1 時,證 γ_t (P(3k+1,2))=2(k+1), k=1,2,…。

下麵分三種情形來討論:

子情形 1.1 當 k=1 時，此時 P(4,2)的結構比較特殊，只有外圈，沒有內圈，頂點集 $W=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ 構成的子圖只有兩點邊(w_1,w_3)和(w_2,w_4)。假設 T 是 P(4,2)的最小全控制集，又由於 P(4,2)是 3 正則圖，故由引理 1 知 γ_t (P(4,2))≥$\left\lceil \frac{2\times 4}{3} \right\rceil$=3。若 γ_t (P(4,2))=3, 即|T|=3，由全控制的定義知，T 的導出子圖不能含有孤立點，故 T 中的 3 點構成的子圖必須是連通的，分析 P(4,2)的結構知道，這樣的 3 個點生成的子圖中有兩條邊，下麵分 4 種情況來討論:

(1) 若該 3 點是外圈上的點，則 W 中的除與該 3 點相鄰的剩下的一個點不能被全控制;

(2) 若 T 中該 3 點中有 2 個是外圈上的點，另一個是內圈上的點，不失一般性，不妨設 $T=\{u_1,u_2,w_1\}$, 則此時 w_4 不被全控制;

(3) 若 T 中有 1 個點是外圈點，另 2 個點為 W 中的點，不失一般性，設 $T=\{u_1,w_1,w_3\}$,則，此時有 w_2,w_4 不被全控制;

(4) T 中的 3 個點不可能為 W 中的點，因為 $W=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$導出的子圖中只有兩條邊, 該子圖是不連通的，所以不存在 3 個點構成的連通子圖。

由上面 4 種情況的討論可知，P(4,2)不可能由 3 個點全控制，而存在四個點 w_1,w_2,w_3 及 w_4 可全控制 P(4,2)。故 γ_t (P(4,2))=4=2(k+1)。

當 k≥2 時，此時分兩種情況來討論，k 為偶數和 k 為奇數。

子情形 1.2 當 k 為偶數時

此時 P(3k+1,2)有一個外圈 C 和一個內圈 C_1，分別為

$C=u_1u_2u_3\ldots u_{3k}u_1$;

$C1 = w_1w_3w_5\ldots w_{3k+1}w_2w_4w_6\ldots w_{3k}w_1$;

因為 P(3k+1,2)是一個 3 正則圖, 故由引理 1 得 γ_t (P(3k+1,2))≥$\left\lceil \frac{2(3k+1)}{3} \right\rceil$=2k+1。

現令 $T_1=\{u_1,w_1,u_4,w_4,\ldots,u_{3k-2},w_{3k-2},u_{3k-1},u_{3k+1}\}$，此時 T_1 中的點 u_i 與 w_i 相互全控制,且 u_1 全控制了 u_{3k+1} 和 u_2,u_{3k+1} 全控制了 u_{3k}. 其他的 T_1 中的 u_i 全控制了 u_{i-1} 和 u_{i+1}, 這裏 i=4,7,…,3k-2; 類似地, w_1 全控制了 w_{3k},w_3, T_1 中的 w_i 全控制了 w_{i-2} 和 w_{i+2}，這裏 i=4,7,…,3k-2，同時 u_{3k-1} 和 u_{3k+1} 分別全控制了 w_{3k-1} 和 w_{3k+1}。即 T_1 是 P(3k+1,2)的一個全控制集，而$|T_1|$=2(k+1)，故 γ_t (P(3k+1,2))≤2(k+1)，結合 γ_t (P(3k+1,2))≥$\left\lceil \frac{2(3k+1)}{3} \right\rceil$=2k+1。可得 2k+1≤ γ_t (P(3k+1,2))≤2(k+1)。

下麵來證明 γ_t (P(3k+1,2))≠2k+1，從而得出 γ_t (P(3k+1,2))=2(k+1)。

反證法，假設 γ_t (P(3k+1,2))=2k+1。則∃一個最小全控制集 T，滿足|T|=2k+1。

因為 T 是最小全控制集，所以 T 中沒有孤立頂點，由廣義 Petersen 圖的結構性質知，T 中至少存在 3 個頂點，這 3 個頂點導出的子圖是一條路，這 3 個頂點要麼都是相鄰的外圈點或內圈點，要麼 2 個點是外圈點一個點是內圈點或反之。若 3 個點都是內圈點或者外圈點, 不失一般性, 不妨設該 3 點為 w_3, w_5, w_7, 這 3 個點相互全控制並且控制了外圈點 u_3, u_5, u_7 和內圈點 w_1, w_9，此時外圈上，u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 是連續相鄰的點，但 u_4, u_6 未被控制，故要麼由內圈上的 w_4, w_6 來全控制, 要麼至少由 u_5 來全控制, 若是前者, 即 w_3, w_5, w_7, w_4, w_6 共控制了 14 個頂點，故剩下的 2(3k+1)-14 個頂點，至少需要 2(3k+1)-14/3=2k-4 個點來全控制，此時滿足這個最少數的條件是 T 中其他的任 2 個點都沒有公共鄰接點, 但是在 $w_{11},\ldots,w_{3k+1}$ 之間共有(3k-8)/2 個點未被全控制，要使這些點被全控制，其中不能有

相鄰的點在 T 中，否則這樣兩個相鄰的點控制了外圈上間隔為 1 的點，要使這個間隔點被全控制必然導致有兩個 T 中點有公共鄰接點, 這與 2k-4 個全控制點矛盾。因此要使 $w_{11},\ldots,w_{3k+1}$ 被控制，T 中控制這些點的相鄰點只能一個在外圈上一個在內圈上，但這至少需要(3k-8)/(2×3)個點，顯然這也導致 T 中有 2 個全控制點有共同的鄰域. 所以這 3 個點其中有 2 個是外圈(或內圈) 點另一個點是內圈 (或外圈) 點，不失一般性，不妨設這 3 個點為 u_3,w_3,w_5，這 3 個點全控制了 $u_2, u_3, u_4, w_1, w_3, w_5, w_7$，這樣還有 3k+1-3+3k+1-4=6k-5 未被全控制,又因為每個點度為 3 只能全控制 3 個點，故這 6k-5 個點至少需要 2k-1 個點來控制, 這樣全控制點至少有 2k-1+3=2k+2 這與|T|=2k+1 矛盾。綜上所述可知，不存在 2k+1 個點全控制 P(3k+1,2)。故 γ_t (P(3k+1,2))=2(k+1)。

子情形 1.3 當 k 為奇數時

在此種情況下有兩個內圈, 證明類似子情形 1.2，這裏不再討論。

綜合上面的情況可知故 γ_t (P(3k+1,2))=2(k+1)，情形 2 證畢!

情形 3 當 m=3k+2 時，k≥1

此時，由引理 1 可得 γ_t (P(3k+2,2))≥ $\left\lceil \frac{2(3k+2)}{3} \right\rceil$=2k+2。

要證明 γ_t (P(3k+2,2))=2k+2, 只要證明存在一個全控制集 T⊆V(P(3k+2,2)),且|T|=2k+2 即可。

子情形 1.1 當 k 為偶數時

此時類似前面可知 P(3k+2,2)的外圈點構成一個長度為 3k+2 的外圈，記外圈 $C=u_1u_2u_3\ldots u_{3k+2}u_1$。P(3k+2,2)的內圈點構成了兩個長度為 3k/2 的內圈，兩個內圈分別用 C_1，C_2 來表示：

$C_1=w_1w_3w_5\ldots w_{3k+1}w_1$;

$C_2=w_2w_4w_6\ldots w_{3k+2}w_2$.

取 $T=\{u_2, w_2, u_5, w_5,\ldots, u_{3k-1}, w_{3k-1}, u_{3k}, u_1\}$，顯然 T 中的點 u_i 和 w_i 相互全控制，這裏 i=2,5,…,3k-1. 且 u_i 全控制了 u_{i-1} 和 u_{i+1}，u_{3k} 全控制了 u_{3k+1}，u_1 全控制了 u_{3k+2}，即外圈上的點可由 T 中的點全控制。由於 T 中的點 w_{3i+2} 全控制了內圈 C_1 上的 w_{3i} 和 w_{3i+4}，這裏 i=1,3,…,k-1，而 u_1 又控制了 w_1，故內圈 C_1 上的點可由 T 中的點全控制。對於內圈 C_2，T 中的點 w_2 全控制了內圈 C_2 上的 w_{3k+2} 和 w_4 ,T 中的點 w_{3i+2} 全控制了內圈 C_2 上的 w_{3i} 和 w_{3i+4}，這裏 i=2,4,…,k-2，而 u_{3k} 又控制了 w_{3k}，故內圈 C_2 上的點也可由 T 中的點全控制。綜上所述 T 是 P(3k+2,2)的一個全控制集，並且因為|T|=2k+2。故 T 是最小控制集。所以 γ_t (P(3k+2,2))= 2(k+1)。

子情形 1.2 當 k 為奇數時。

此時 P(3k+2,2)的外圈仍記為 $C=u_1u_2u_3\ldots u_{3k+2}u_1$，內圈點只構成了一個長度為 3k 的內圈，記為 $C_1=w_1w_3w_5\ldots w_{3k+2}w_2w_4w_6\ldots w_{3k+1}w_1$。

取 $T=\{u_2, w_2, u_5, w_5, \ldots, u_{3k-1}, w_{3k-1}, u_{3k}, u_1\}$,類似子情形 1.1 可證 T 是 P(3k+2,2)最小控制集。所以 γ_t (P(3k+2,2))=2(k+1)。

綜合這兩種情形，得到當 m=3k+2 時，γ_t (P(m,2))=2(k+1)。證畢!

REFERENCES

[1] Huang Jia, On Domination-Stability of Graphs. The doctoral dissertation of the Univerisity of Science and Technology og China.(in Chinese) (黃佳，圖的控制穩定性研究. 中國科技大學博士論文，2007).

[2] Bnaani K. Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs [J]. J Combinatorial Theory, 1978, 181-183.

[3] Exoo G, Harary F, Kabell J. The crossing numbers of some generalized Petersen graphs [J]. Math Scand, 1981, 184-188.

[4] Hou Xin-min, Wang Tian-ming. Wide diameters of generalized Petersen graphs [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(2): 249-253.

[5] QI Deng-ji, Domination Number of Generalized Petersen Graphs (m is odd) , Journal of Qingdao University of Science and Technology , Vol . 26 No. 1 Apr . 2005, 92-94(in Chinese) (齊登記. 廣義 Petersen 圖的控制數——當 m 是奇數時 P(m,2)的控制數[J]. 青島科技大學學報 (自然科學版)，2005, 26(1): 92-94).

[6] QI Deng-ji, Domination Number of Generalized Petersen Graphs (m is even) , Journal of Qingdao University of Science and Technology , Vol . 26 No. 2 Apr . 2005, 181-183(in Chinese)(齊登記. 廣義 Petersen 圖的控制數——當 m 是偶數時 P(m,2)的控制數[J]. 青島科技大學學報 (自然科學版)，2005, 26(2): 181-183).

[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. New York: North-Holland, 1976.